Mathematik - Klasse 10 - Daten, Zufall & Modellieren - schwer

Thema: Entscheidungsregel für einen Schnelltest | Arbeitszeit: ca. 60 Minuten | Kompetenzen: Binomialmodell anwenden, Fehlentscheidungen unterscheiden und Schwellen bewerten

Ausgangssituation / Daten

Ein Schnelltest zeigt bei einer tatsächlich nicht betroffenen Person mit Wahrscheinlichkeit 5 % fälschlich ein positives Ergebnis. In einer Kontrollreihe werden 20 sicher nicht betroffene Personen getestet. Das Gerät wird überprüft, wenn mindestens 3 Tests positiv ausfallen. Unabhängige Ergebnisse und konstantes p=0,05 werden angenommen.

Aufgaben

1. Berechne P(X=0), P(X=1) und P(X=2) auf vier Dezimalstellen.

2. Bestimme P(X≥3) mit dem Gegenereignis.

3. Erkläre die Bedeutung von P(X≥3) für die Entscheidungsregel.

4. Eine strengere Regel überprüft bereits ab 2 positiven Ergebnissen. Berechne die Wahrscheinlichkeit einer unnötigen Überprüfung und vergleiche.

5. Beurteile beide Schwellen. Erkläre den Zielkonflikt und nenne zwei Annahmen, die vor einer realen Entscheidung geprüft werden müssen.

Vollständige Lösungen

Mathematik - Klasse 10 - Entscheidungsregel für einen Schnelltest

1. $P(0)=0{,}95^{20}\approx 0{,}3585$. $P(1)=20\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{19}\approx 0{,}3774$. $P(2)=190\cdot 0{,}05^{2}\cdot 0{,}95^{18}\approx 0{,}1887$.

2. $P(X\geq 3)=1-0{,}3585-0{,}3774-0{,}1887\approx 0{,}0754=7{,}54\ \%$.

3. Obwohl das Gerät normal arbeitet, wird es in etwa 7,5 % solcher Kontrollreihen allein durch Zufall überprüft. Das ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms unter den Modellannahmen.

4. Ab 2: $P(X\geq 2)=1-P(0)-P(1)\approx 0{,}2642=26{,}42\ \%$. Die unnötige Überprüfung wird also deutlich wahrscheinlicher.

5. Die Schwelle 2 reagiert empfindlicher, verursacht aber mehr Fehlalarme; Schwelle 3 vermeidet Kontrollen, könnte echte Verschlechterungen später erkennen. Zu prüfen sind Unabhängigkeit, konstante Fehlerquote und Folgen übersehener Fehler bzw. unnötiger Kontrollen.

Kontrolle: Die Wahrscheinlichkeit ab 2 muss größer sein als die Wahrscheinlichkeit ab 3.

Lösung online
QR-Code scannen:
https://uebungsblaetter.sekundarschule-ausleben.de/loesungen/mathematik/mathematik-k10-095-schwer-v3.html